Décomposition polaire

Théorème 1 (Décomposition polaire)**.** *On a les homéomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U_n(\mathbb{R}) \times H_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (U,H) & \longmapsto & UH \end{array}$$

Démonstration.

On ne démontrera ici que le premier homéomorphisme, la démonstration du second étant similaire.

On note μ cette application. Elle est bien définie et elle est continue.

Étape 1 : Montrons que μ est surjective.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^{\mathrm{t}}MM$ est symétrique, et on a de plus $\langle X, {}^{\mathrm{t}}MMX\rangle = \langle MX, MX\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, et puisque $\langle X, {}^{\mathrm{t}}MMX\rangle = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ on a que ${}^{\mathrm{t}}MM$ est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
On peut diagonaliser ${}^{\mathrm{t}}MM$ dans une base orthonormée. Il existe alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i tels que ${}^{\mathrm{t}}MM = PDP^{-1}$. On pose alors $S = P\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$. C'est une matrice symétrique, puisque P est orthogonale, et définie positive, car ses valeurs propres sont strictement positives.
On a $S^2 = {}^{\mathrm{t}}MM$ et, si l'on pose $O = MS^{-1}$, il vient que :

$${}^{\mathrm{t}}OO = {}^{\mathrm{t}}MS^{-1}MS^{-1} = {}^{\mathrm{t}}S^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}MMS^{-1} = {}^{\mathrm{t}}S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

Ainsi $M = OS$, où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc μ est surjective.

Étape 2 : Montrons que μ est injective.

Supposons que l'on ait $M = OS = O'S'$, avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il vient alors :

$$S^2 = {}^{\mathrm{t}}MM = {}^{\mathrm{t}}O'S'O'S' = {}^{\mathrm{t}}S'\,{}^{\mathrm{t}}O'O'S' = S'^2$$

Soit Q un polynôme interpolateur tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Alors :

$$S = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)P^{-1} = Q\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Or, S' commute avec S'^2, donc avec $Q(S'^2) = S$, et donc S' et S sont diagonalisables dans une base commune. Il existe ainsi une matrice de passage P_0 qui permet de les diagonaliser simultanément. On a alors $S' = P_0\,\mathrm{Diag}(\mu'_1, \dots, \mu'_n)P_0^{-1}$ et $S = P_0\,\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P_0^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} S'^2 = S^2 &\implies P_0\,\mathrm{Diag}(\mu_1'^2, \dots, \mu_n'^2)P_0^{-1} = P_0\,\mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)P_0^{-1} \\ &\implies \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i'^2 = \mu_i^2 \\ &\implies \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mu'_i = \mu_i \\ &\implies S' = S \end{aligned}$$

Ainsi, on a $S = S'$, puis $O = O'$, d'où l'injectivité de μ.

Étape 3 : Montrons que μ^{-1} est continue.

Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$, de sorte que $M_p = O_pS_p$, avec $O_p \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_p \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On va montrer que les suites $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers O et S.
Comme $U_n(\mathbb{R})$ est compact, soit $\overline{O}$ une valeur d'adhérence de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$, et soit $(O_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\overline{O}$. Alors la sous-suite $(S_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{O}^{-1}M$, matrice symétrique et définie positive, car :

$$\overline{S} = \overline{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$$

On a donc, par injectivité de μ, que $M = \overline{OS}$, puis $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$. D'où la continuité de μ^{-1}.

□

Corollaire 2. *Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2^2 = \rho({}^{\mathrm{t}}AA)$.*

Démonstration.

Soit $A = OS$ la décomposition polaire de A. Comme $\|OSx\|_2 = \|Sx\|_2$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|A\|_2 = \|S\|_2$. Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, ordonnée de sorte que les valeurs propres correspondantes soient dans l'ordre décroissant.
Maintenant, si $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ est de norme 1, on a :

$$\|Sx\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i\right\|_2 \leqslant |\lambda_1| \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_2 = |\lambda_1| = \rho(S)$$

La borne étant atteinte pour $x = e_1$. On a ainsi montré que $\|S\|_2 = \rho(S)$, et on a ensuite :

$$\|A\|_2^2 = \|S\|_2^2 = \rho(S)^2 = |\lambda_1|^2 = \rho(S^2) = \rho({}^{\mathrm{t}}AA)$$

□

Références

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1*. Calvage et Mounet, 2013